Exercices et problèmes

10 On considère les nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
Donner l'écriture exponentielle de
iz_1, $\frac{z_2}{1+i}$, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1z_2z_3$, z_3^4, $\frac{z_2^3}{z_1^6}$ et $\frac{\overline{z_2}}{z_3}$.

11 Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(i+1)$.

12 Déterminer les racines quatrièmes de $8\sqrt{2}(-1-i)$.

13 Déterminer les racines cinquièmes de $32\,i$.

14 Déterminer les racines sixièmes de $32\left(i-\sqrt{3}\right)$.

15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.
a. $z^2+18z+1681=0$.
b. $z^2-(5-i)z+8-i=0$.
c. $z^2+4(i-1)z+2(4-i)=0$.
d. $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$.

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.
a. $z^4+6z^2+25=0$.
b. $z^4+4z^2-77=0$.

17 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3-8z^2+24z-32=0$.
Vérifier que $z_0=4$ est une solution de (E).
2. Résoudre (E).
On notera z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.
Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2.

18 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$.
1. Montrer que l'équation admet une racine réelle que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

19 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3=2+11\,i$.
1. Vérifier que $z_0=2+i$ est une solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z\overline{z}+3(z-\overline{z})=13+18i$, on notera z_1 et z_2 les solutions avec $\mathrm{Re}(z_1)<0$.
2. Représenter les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
3. Déterminer l'affixe du point G centre de gravité du triangle OAB.
4. Déterminer l'affixe du point C pour que OABC soit un parallélogramme.

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$.
a. Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle que l'on déterminera.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. a. Représenter les points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.
b. Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$.
En déduire la nature du triangle OBC.
c. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?
d. Soit D le point tel que CD = CO et $(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Quelle est la nature de OCDB ?